量子情報L1

1　量子力学の２重構造

1.1　量子力学の公理

まず、量子力学の公理を５項目掲げる。これは、今のところ他のことから証明できることではなく仮定せざるを得ないものである。ただし、４番目はあとで「一般化された測定の理論」に置き換えるつもりである。まず大前提として、量子状態全体の空間であるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ [1] があるとしよう。[2] その中の区別できる２点、$|0\rangle, |1\rangle \in \mathcal{H}$ を取り上げて５つの公理を述べる。はじめの４つは１粒子に関するもので、５つ目が多粒子に関するものである。

ディラックによる代表的な教科書 [1] によるものとは見た目に違いがあるかもしれないが、内容的には同じである。

(1) 重ね合わせの原理

状態 $|0\rangle \in \mathcal{H}$ と状態 $|1\rangle \in \mathcal{H}$ が物理的に実現可能な状態ならば、その重ね合わせ

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathcal{H} \quad , \alpha, \beta \in \mathcal{C} \tag{1}$$

も物理的に可能な状態である。($\in C$ はその量が複素数であることを意味する。)[3]

この原理が典型的に現れるのが、ヤングによる２重スリットの干渉実験である。一つのスリットを通過する光子の状態 $|0\rangle$ ともう一つのスリットを通過する光子の状態 $|1\rangle$ の重ね合わせ状態が最終的にスクリーンに干渉パターンを生じさせる。

(2) 観測可能量

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が、$a \in R$ をその固有値とし $|a\rangle$ を規格化された固有状態として

$$A = \sum_a a|a\rangle\langle a| \tag{2}$$

と書ける場合に A を測定可能量あるいは物理量と呼ぶ（スペクトル分解）。これは、A が自己共役演算子であることと同値である。(ここに $\in R$ はその数が実数であることを意味する。)

[1] ヒルベルト空間とは、内積が定義された線形ベクトル空間のことである。２つのベクトル $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ に対して内積 $\langle a|b\rangle \in C$ を定義し、それによりベクトル $|a\rangle$ に対する双対ベクトル $|a\rangle \in \mathcal{H}^*$ を定義する。

[2] ここで抽象的な状態ベクトル $|\psi\rangle$ といわゆる波動関数 $\psi(x) := \langle x|\psi\rangle$ を区別しよう。あとの章の弱値のところで述べるように、波動関数を実測することは可能であるが、状態ベクトルはできない。

[3] このことは、単に状態 $|0\rangle \in \mathcal{H}$ と状態 $|1\rangle \in \mathcal{H}$ が以下に述べるシュレーディンガー方程式(光子の場合にはマックスウェル方程式）の解ならば、重ね合わせ状態も解であるという、線形方程式に対して成り立つ数学的事実を述べているのではない。「物理的に実現できる」ところがポイントである。いわゆる超選択則との関係はここでは述べない。例えば、ペレスの教科書 [2] を参考にして欲しい。

これを行列表示すれば、

$$A = \begin{pmatrix} a_1\,0\,0\cdots 0 \\ 0\,a_2\,0\cdots 0 \\ 0\,0\;\; a_3\cdots 0 \\ \cdots \end{pmatrix}$$

[4]

(3) シュレーディンガー方程式
状態の時間発展は物質の場合にはシュレーディンガー方程式：

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle \tag{3}$$

に従う。ここに、H は（1粒子系の）ハミルトニアンと呼ばれる量であり、物理系を与えれば決まる。後に定義する物理量の一つであるが、もっとも重要な物理量である。　光子の場合にはマクスウェル方程式がシュレーディンガー方程式の代わりをする。

状態はユニタリー演算子 $U = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$ [5] により時間発展する。すなわち、

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle. \tag{4}$$

(4) 波束の収縮と確率解釈
重ね合わせ状態：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathcal{H} \quad ,\alpha,\beta \in \mathcal{C} \tag{5}$$

にある時に、状態を判定することのできる測定すると、状態は $|0\rangle$ か $|1\rangle$ のどちらかに変化し、その確率はそれぞれ係数の絶対値の2乗、$|\alpha|^2$、$|\beta|^2$ に比例する。$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ と全体の大きさを1に規格化しておけば、それぞれ確率の意味を持つ。この項目がもっとも不自然とされ、量子力学の建設時から議論の的であった。

ヤングの2重スリットの実験の例で述べると次のようになる。どちらのスリットを通ったか測定すると、量子状態は重ね合わせ状態から状態は $|0\rangle$ か $|1\rangle$ のどちらかに変化して、干渉縞は消える。

このことの不思議さを強調した有名な例え話が、シュレーディンガーの猫である。箱の中の猫は測定する前は、生きている状態と死んでいる状態の重ね合わせである。測定すると「生きている」か「死んでいるか」どちらかに確率的に飛躍するというのが、一番素朴なコペンハーゲン

[4] 演算子 A が自己共役であるとは、$A = A^\dagger$ でかつ、A と $A^\dagger$ の定義域が一致することである。

[5] $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$