をすべての ρ に要求すると、ユニタリティーの関係：

$$\sum_n A_n^\dagger A_n = \mathbf{1} \tag{34}$$

を得る。

ここで述べた、３つの表現「測定モデル」「Kraus 表示」「完全正写像」は等価である。その中で、「完全正写像」は確固とした根拠を持っている点に強みがある。Kraus 表示は実際的に便利であり、測定モデルは物理的に分かり易い。

参考文献

[1] J. von Neumann, *Mathematatische Grundlagen der Quantumechanik* (Springer, Berlin, 1932), [*Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).]

[2] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79-87 (1984)

[3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

これに対応して、状態 $|\psi\rangle_B \in \mathcal{H_B}$ を

$$|\psi\rangle_B = \sum_i c_i^* |i\rangle_B. \tag{26}$$

と定義しよう。

大分、前置きが長くなったが、補題の内容は

$$\exists\sigma,\ \langle\psi|_B \sigma|\psi\rangle_B = \Lambda(|\psi\rangle_A\langle\psi|) \tag{27}$$

である。

(proof)

$$\begin{aligned}\langle\psi|_B\sigma|\psi\rangle_B &= \textstyle\sum_{i,j}\langle\psi|i\rangle_B\Lambda(|i\rangle_A\langle j|)\langle j|\psi\rangle_B \\ &= \textstyle\sum_{i,j} c_i c_j^* \Lambda(|i\rangle_A\langle j|) \\ &= \Lambda(|\psi\rangle_A\langle\psi|)\end{aligned}$$

ここで、Λ の完全正値性の仮定を用いると、$\sigma = \Lambda_A \otimes \mathbf{1}_B(|\alpha\rangle\langle\alpha|)$ は正演算子であることが分かる。したがって、σ の固有値は正であるので、規格化定数を含めた固有状態 $|s_i\rangle$ を定義することができて、

$$\sigma = \sum_i |s_i\rangle\langle s_i| \tag{28}$$

と書ける。

ここで演算子 A_i を

$$A_i|\psi\rangle_A = \langle\psi|_B|s_i\rangle \tag{29}$$

で定義しよう。これを用いると

$$\langle\psi|_B\sigma|\psi\rangle_B = \sum_i A_i|\psi\rangle_A\langle\psi|_A A_i^\dagger \tag{30}$$

を得る。

これと補題の結果を合わせると、

$$\Lambda(|\psi\rangle_A\langle\psi|_A) = \sum_i A_i|\psi\rangle_A\langle\psi|_A A_i^\dagger \tag{31}$$

Λ の凸線形性 $\Lambda(\sum_i p_i\rho_i) = \sum_i p_i\Lambda(\rho_i)$ を仮定すれば、量子操作 Λ の Kraus 表示

$$\Lambda(\rho) = \sum_i A_i\rho A_i^\dagger \tag{32}$$

に到達する。

さらに、跡の保存

$$Tr[\Lambda(\rho)] = 1 \tag{33}$$

純粋状態 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B]$ を密度行列であらわすと、

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1,0,0,1 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 1,0,0,1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

ただし、基底を $(ii'),(jj') = (00),(01),(10),(11)$ に取り、上記の行列要素を $\rho_{ii',jj'}$ とした。

B の qubit について、転置を取れば[2]

$$\Lambda \otimes \mathbf{1}_B(\rho) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1,0,0,0 \\ 0,0,1,0 \\ 0,1,0,0 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

この行列の固有値は、簡単な計算で分かるように $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ となり、負の固有値を一個含んでいる。したがって、転置は完全正写像でない。この事実が、物理的に何を意味するかは定かでないが、強いて言えば次のように言えようか。転置は始状態と終状態を取り替えることを意味するので、時間反転に対応するだろう。部分転置は部分的時間反転というあり得ないことを意味するので、非物理的だろう。

3.2 完全正写像と Kraus 表示

準備として次の等式を証明しよう。

補題

基底を $|i\rangle_A \in \mathcal{H}_A$, $|i\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ とし、以後重要な役割をする演算子 σ を

$$\sigma := \Lambda_A \otimes \mathbf{1}_B(|\alpha\rangle\langle\alpha|) \tag{23}$$

と定義する。ただし、ここに便宜的に導入した状態 $|\alpha\rangle$ は

$$|\alpha\rangle := \sum_i |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \tag{24}$$

である。(必ずしも規格化されていない。)

状態 $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ を基底 $\{|i\rangle_A\}$ で展開しよう。すなわち、

$$|\psi\rangle_A = \sum_i c_i |i\rangle_A. \tag{25}$$

---

[2] $\rho_{ii',jj'} \rightarrow \rho_{ij',ji'}$