小澤の不等式においては、測定における誤差と擾乱に関係に関心があるので、初期状態は所与としている。

この3項からなる不等式は、(三角不等式1回、コーシーシュバルツ不等式を3回用いていることからも分かるように) 緩い不等式で、等号成立は自明の場合しか無い。

最近、物理量 A と B がスピンの場合に、中性子実験あるいは光学実験で、オリジナルなハイゼンベルグの不等式は破れていて小澤の不等式が成立していることを示す実験が行われた [7, 8]。

参考文献

[1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[2] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantumechanik* (Springer, Berlin, 1932), [*Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).]

[3] M. Ozawa, "Quantum measuring processes of continuous observables," **Journal of Mathematical Physics** vol. 25, pp. 79〜87, (1988).

[4] M. Ozawa, " Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement," **Physical Review A**, vol. 67, pp. 042105-1〜042105-6, (2003).

[5] M. Ozawa, " Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements," **Annals of Physics**, vol. 311, pp. 350〜416, (2004).

[6] W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", **Zeitschrift für Physik** 43 (3-4): pp 172〜98 (1927).

[7] J. Erhart et al. **Nature Phys. 8**, 185 (2012).

[8] L. A. Rozema et al. **Phys. Rev. Lett.109**, 100404 (2012).

関係 $\Delta q\Delta p \sim \hbar$ の関係があるとして、この相補性を量子力学建設の指導原理としようと提案した。その後、量子力学の標準的な教科書では、よく似た形をしているが内容的には全く異なる運動量 p の標準偏差 $\sigma(p)$ と位置 q の標準偏差 $\sigma(q)$ に対する不等式 $\sigma(p)\sigma(q) \geq \hbar/2$ が不確定性関係として紹介されて来た。　しかし、これは初期状態の情報であり測定とは無関係である。

ここでは、小澤によるハイゼンベルグの不確定性関係の見直しを紹介しよう [3, 4, 5]。

まず、測定前の物理量 A の値を（測定後の）メータ量 M の値で評価するときの誤差 $\epsilon(A)$ を

$$\epsilon^2(A) := < U^\dagger(1 \otimes M)U - A \otimes 1)^2 > \tag{30}$$

と定義しよう。[1] 同様に、上記の測定に伴う別の物理量 B の擾乱 $\eta(B)$ を

$$\eta^2(B) := < U^\dagger(B \otimes 1)U - B \otimes 1)^2 > \tag{31}$$

と定義しよう。ここに、$< .. >$ は測定前の状態 $|\psi\rangle$ についての期待値である。$E := U^\dagger(1 \otimes M)U - A \otimes 1)$,$D := U^\dagger(B \otimes 1)U - B \otimes 1$ と書いて、

$$\begin{aligned} 0 = U^\dagger[B \otimes 1, 1 \otimes M]U &= [B \otimes 1 + D, A \otimes 1 + E] \\ = [B \otimes 1, A \otimes 1] &+ [D, A \otimes 1] + [B \otimes 1, E] + [D, E] \end{aligned} \tag{32}$$

ここで三角不等式を用いると

$$|[D, A \otimes 1]| + |[B \otimes 1, E]| + |[D, E]| \geq |[A, B]| \tag{33}$$

を得る。一方、コーシーシュバルツの不等式から得られるよく知られた不等式

$$\sigma(D)\sigma(E) \geq |[D, E]| \tag{34}$$

などを用いると

$$\sigma(D)\sigma(A) + \sigma(B)\sigma(E) + \sigma(A)\sigma(B) \geq |[A, B]| \tag{35}$$

を得る。定義から、$\epsilon(A) = \sigma(E)$, $\eta(B) = \sigma(D)$ であることに注意するとハイゼンベルグー小澤の不確定性関係

$$\epsilon(A)\eta(B) + \eta(B)\sigma(A) + \epsilon(A)\sigma(B) \geq |[A, B]| \tag{36}$$

に到達する。

左辺の第一項だけだとオリジナルなハイゼンベルグの不等式 [6] になる。誤差と擾乱の他に測定前の状態のもつ量子揺らぎ $\sigma(A)$、$\sigma(B)$ に依存する。

---

[1] ある物理量を測定するということは、その物理量の測定直前の値を知る目的で行う。したがって、誤差とは測定値と物理量の測定直前の値の差であろう。

る量子操作と次のものが独立であると言う意味でマルコフ的であることを仮定している。これを、Kraus 表示の観点から導出しよう。

Kraus 演算子を

$$A_0 := 1 - \frac{\tau}{2}\sum_{k=1}^{N-1} L_k^\dagger L_k \tag{23}$$

$$A_k := \sqrt{\tau} L_k. \tag{24}$$

と選ぼう。

τ が小さい時には、ユニタリーティーの関係

$$A_0^\dagger A_0 + \sum_i A_i^\dagger A_i = 1 + O(\tau^2) \tag{25}$$

を近似的に充たす。

時間 τ 後の状態は量子操作によって

$$\rho(\tau) = \sum_{i=0} A_i \rho(0) A_i^\dagger = \rho(0) + \tau \sum_{i=1} L_i \rho(0) L_i^\dagger - \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\{L_i^\dagger L_i, \rho(0)\} + O(\tau^2) \tag{26}$$

となるので、マスター方程式：

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \sum_{i=1}[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\}] \tag{27}$$

を得る。系固有のハミルトニアン H がある場合は上記の方程式は

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -i[H, \rho] +]\sum_{i=1}[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\}] \tag{28}$$

となる。

Kraus 演算子と被測定系と測定器系の間の相互作用によるユニタリー演算子 U の関係が

$$A_i = \langle i|U|0\rangle = \sqrt{\tau} L_i \tag{29}$$

であったこと思い出そう。$U = 1 - iH\tau$ から、$L_i = -i\sqrt{\tau}\langle i|H|0\rangle$ なので、相互作用ハミルトニアンとしては、$O(\frac{1}{\sqrt{\tau}})$ 程度の強いものを考えている。Lindblad 演算子 L_i の具体的な形については、物理系毎に考えなければならない。

5 不確定性関係

１９２７年にハイゼンベルグは、ガンマ線顕微鏡の思考実験から粒子の位置の測定の誤差 Δq とそれによる運動量への反跳 Δp にはトレードオフの