L5　一般相対論の物理

球対称の真空解（Schwarzschild 解）をもとめる。

それをもとに，一般相対論の実験的・観測的検証をおこなう。

それらは

(1) 重力場による周波数の変化
(2) 近日点移動
(3) 重力レンズ効果

5-1 球対称解 (spherically symmetric solution)

物質がないところ, $T_{\mu\nu}=0$, では Einstein 方程

$$R_{\mu\nu}=0$$

となる。

計量として, 球対称のもの

$$\boxed{ds^2 = -B(r,t)\,dt^2 + A(r,t)\,dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)}$$

を仮定して (1) を解こう。

$$\boxed{\begin{aligned} g_{tt} &= -B, & g_{rr} &= A, & g_{\theta\theta} &= r^2, & g_{\phi\phi} &= r^2\sin^2 \\ g^{tt} &= -B^{-1}, & g^{rr} &= A^{-1}, & g^{\theta\theta} &= r^{-2}, & g^{\phi\phi} &= r^{-2}s \end{aligned}}$$

others $=0$.

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{\dot{B}}{2B}, \quad \Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma^t_{rr} = \frac{\dot{A}}{2B}$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma^r_{rt} = \frac{\dot{A}}{2A}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{A'}{2A}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{A}$$

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar} + \frac{B'^2}{4AB} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A}$$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{Ar} - \frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{A}^2}{4AB} +$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} = 0$$

$$\boxed{R_{tr} = -\frac{\dot{A}}{Ar} = 0}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \cdot R_{\theta\theta} = 0$$

others $= 0$.

$R_{tr} = 0$ から $\dot{A} = 0$。したがって上式の

$$\begin{cases} R_{tt} = -\dfrac{B''}{2A} + \dfrac{B'A'}{4A^2} - \dfrac{B'}{Ar} + \dfrac{B'^2}{4AB} = 0, \\ R_{rr} = \dfrac{B''}{2B} - \dfrac{B'^2}{4B^2} - \dfrac{A'B'}{4AB} - \dfrac{A'}{Ar} = 0, \\ R_{\theta\theta} = -1 + \dfrac{1}{A} - \dfrac{rA'}{2A^2} + \dfrac{rB'}{2AB} = 0, \end{cases}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \, R_{\theta\theta} = 0$$

上の三本の式には空間微分しか含まれていないことに注意する。