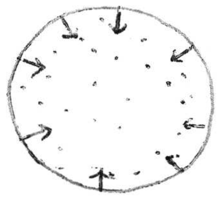
バーコフ (Birkhoff) の定理

球対称な Einstein 方程式の解は，物質のないところでは，静的で Schwarzschild 解に一致する。



球対称
外 = Schwarzschild

この定理は，球対称の重力崩壊の時，星の外の空間が Schwarzschild 時空であることを意味する。

5.2 試験粒子の運動

Schwarzschild 時空の中の，微小な質量 m をもつ（試験）粒子の運動をしらべよう。

Lagrangian として，$x^\mu(\tau)$ を質点の座標として，

$$\boxed{L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} \qquad (10)$$

を採用しよう。（ただし，$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$ をあとで課す。）

Euler-Lagrange 方程式は，

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\tau}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\nu}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \qquad (11)$$

となるが，これに $g^{\mu\lambda}$ をかけて μ について縮約をとれば，

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu}(x)\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \text{。} \qquad (12)$$

これは，固有時条件：

$$\boxed{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2} \qquad (13)$$

を課せば測地線の方程式に他ならない。
光などの zero-mass particle に対しては 右 = 0 とすればよい。

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\tau}} = g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\tau}}\right) = g_{\mu\nu,\rho}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2}g_{\rho\nu,\mu}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\tau}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \left(g_{\mu\nu,\rho} - \frac{1}{2}g_{\rho\nu,\mu}\right)\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$= g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\mu}\right)}_{= g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\nu}}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

$g^{\mu\lambda}$ をかけて、μについて縮約をとれば、

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu}(x)\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

これは測地線の方程式に他ならない。

* $L = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}}$　　　p : パラメタ

も同じ測地線の方程式を与えるが、固有時条件は自然にでてくる。

この場合に作用：

$$S = \int L\, dp$$

は $p \to p' = f(p)$ の reparametrization に対して invariant.

Schwarzschild 時空のばあい、極座標でかけば　$x^\mu = (t, r, \overset{\pi/2}{\overset{\shortparallel}{\theta}}, \varphi)$

$g_{tt} = -\left(1-\frac{a}{r}\right)$, $g_{rr} = \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}$, $g_{\varphi\varphi} = r^2$. $\left(a \equiv \frac{2GM}{c^2}\right)$

なるから (10) の Lagrangian は

$$L = +\frac{1}{2}\left[-\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2\dot{t}^2 + \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right] \quad (14$$

で与えられる。Lagrangian (14) は 時間 t と 角度 φ を 陽に含んでいないので、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = r^2\dot\varphi = b \quad : \quad \text{angular momentum} \quad (15$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot t} = c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot t = dc^2 \quad : \quad \text{energy} \quad (16$$

は保存する。

r についての Euler-Lagrange 方程式をたてて、それを解いてもよいが、すぐにわかるように、それには第一積分があって、($\frac{\partial L}{\partial \dot t}\dot t + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi - L$

$$1^2 = \underbrace{c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot t^2}_{\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}d^2\cancel{c^2}} - \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\dot r^2 - \underbrace{r^2\dot\varphi^2}_{\frac{b^2}{r^2}} \quad (1$$

右辺は固有時をきめる式に一致しているので、左辺=1とした。
(光の場合は 左辺=0)