解答例 (2019.8.1) Akio HOSOYA

(1) 略

(2) 全エネルギーが E以下 の状態数

(2.1)
$$\Omega_0(E) = \frac{V^N}{N!}\int_{H\le E} \frac{d^3p_1\cdots d^3p_N}{h^{3N}} = \frac{V^N}{N!\,h^{3N}}\left(\sqrt{2mE}\right)^{3N}\frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} \quad \cdots (1)$$

$$H(p_1\cdots p_N) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N} p_i^2$$

エントロピー $S(E,V)$ は ボルツマンの公式

$$S(E,V) \simeq k_B \log \Omega_0(E) \quad \cdots (2)$$

これに、スターリングの公式を用いると

$$\underset{U}{\overset{}{S(E,V)}} = k_B N \log\frac{V}{N} + \frac{3}{2}k_B N \log\left(\frac{4\pi m}{3}\frac{E}{N}\right) + \frac{5}{2}k_B T \quad \cdots (3)$$

(2.2) 熱力学第1法則 $dU = TdS - p\,dV$ から

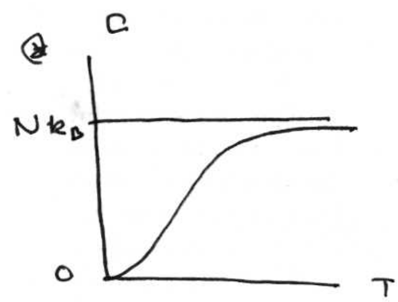
$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{k_B N}{V}$$ を得る。これが ボイル・シャルルの法則

$pV = k_B N T$ を再現する

(2.3) 同様に

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{3}{2}k_B N\,\frac{1}{U}.$$

したがって $U = \frac{3}{2}k_B N T.$



(3)

(3.1) $$Z = \left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)^N$$

(3.2) $$U = -\frac{\partial \log Z}{\partial\beta} = \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}N}{1+e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{\varepsilon N}{e^{\beta\varepsilon}+1}$$

(3.3) $$F = -k_B T\log Z = -k_B T N\log(1+e^{-\beta\varepsilon})$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B N\log(1+e^{-\beta\varepsilon}) + k_B T N\frac{\varepsilon}{k_B T^2}\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$= k_B N\log(1+e^{-\beta\varepsilon}) + \frac{\varepsilon N}{T}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}+1}.$$

(4)

(4.1) $$Z = \sum_{n_1\cdots n_N}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n_1+\cdots+n_N+\frac{N}{2})} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}\right)^N$$

$$= \left(\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\right)^N$$

(4.2) $$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = N\frac{\partial}{\partial\beta}\left(2\,\mathrm{sh}\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) = \frac{N\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

(4.3) $$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{N}{k_B T^2}\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}^2\frac{\hbar\omega}{2}\beta}$$