例をあげよう。

2順位系の線形表現において、自己共役演算子 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,0 \end{pmatrix}$ の固有値は ± 1 で確かに実数であり、対応する固有ベクトルは $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle \pm |1\rangle]$ である。

4 量子力学の公理

まず、量子力学の基本的な前提を4項目掲げる。これは、今のところ他のことから証明できることではなく仮定せざるを得ないものである。ただし、3番目はあとで「一般化された測定の理論」に置き換えるつもりである。まず大前提として、量子状態全体の空間であるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ があるとしよう。その中の区別できる2点、$|0\rangle, |1\rangle$ を取り上げて4つの公理を述べる。はじめの3つは1粒子に関するもので、4つ目が多粒子に関するものである。

(1) 重ね合わせの原理
状態 $|0\rangle \in \mathcal{H}$ と状態 $|1\rangle \in \mathcal{H}$ が物理的に実現可能な状態ならば、その重ね合わせ

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathcal{H} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{C} \tag{1}$$

も物理的に可能な状態である。($\in C$ はその量が複素数であることを意味する。)[3]

この原理が典型的に現れるのが、ヤングによる2重スリットの干渉実験である。一つのスリットを通過する光子の状態 $|0\rangle$ ともう一つのスリットを通過する光子の状態 $|1\rangle$ 重ね合わせ状態が最終的にスクリーンに干渉パターンを生じさせる。

(2) シュレーディンガー方程式
状態の時間発展は物質の場合にはシュレーディンガー方程式：

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle \tag{2}$$

[3]このことは、単に $|0\rangle \in \mathcal{H}$ と状態 $|1\rangle \in \mathcal{H}$ が以下に述べるシュレーディンガー方程式（光子の場合にはマックスウェル方程式）の解ならば、重ね合わせ状態も解であるという、線形方程式に対して成り立つ数学的事実を述べているのではない。「物理的に実現できる」ところがポイントである。いわゆる超選択則との関係はここでは述べない。例えば、ペレスの教科書 [?] を参考にして欲しい。

に従う。ここに、H は（1粒子系の）ハミルトニアンと呼ばれる量であり、物理系を与えれば決まる。後に定義する物理量の一つであるが、もっとも重要な物理量である。　光子の場合にはマクスウェル方程式がシュレーディンガー方程式の代わりをする。

状態はユニタリー演算子 $U = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$ [4] により時間発展する。すなわち、

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle. \tag{3}$$

(3) 波束の収縮と確率解釈

重ね合わせ状態：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathcal{H} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{C} \tag{4}$$

にある時に、状態を判定することのできる測定すると状態は $|0\rangle$ か $|1\rangle$ のどちらかに変化し、その確率はそれぞれ係数の絶対値の2乗、$|\alpha|^2$、$|\beta|^2$ に比例する。$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ と全体の大きさを1に規格化しておけば、それぞれ確率になる。この項目がもっとも不自然とされ、量子力学の建設時から議論の的であった。

　ヤングの2重スリットの実験の例で述べると次のようになる。どちらのスリットを通ったか測定すると、量子状態は重ね合わせ状態から状態は $|0\rangle$ か $|1\rangle$ のどちらかに変化して、干渉縞は消える。

このことの不思議さを強調した有名な例え話が、シュレーディンガーの猫である。箱の中の猫は測定する前は、生きている状態と死んでいる状態の重ね合わせである。測定すると「生きている」か「死んでいるか」どちらかに確率的に飛躍するというのが、一番素朴なコペンハーゲン学派の考えである。この項目については、測定理論のところで修正をする。

以上、簡単のために状態が2択（$|0\rangle$ か $|1\rangle$）の場合について、重ね合わせの原理を例示したが、これを一般化しておこう。

任意の状態 $|\psi\rangle$ は測定可能量 A の固有値 a の固有状態 $|a\rangle$ で展開できる。

$$|\psi\rangle = \sum_a C_a|a\rangle \in \mathcal{H} \quad \mathrm{C_a} \in \mathcal{C} \tag{5}$$

[4] $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$