統計力学レポート　　　2021年２月１５日提出
学籍番号００７　　　ショーン・コネリー

「ボース・アインシュタイン分布とフェルミ・ディラック分布を比較して述べよ」

1　序論

スピンが整数の粒子は同じ量子状態に何個でも入り、ボソンと呼ばれる。一方、スピンが半整数の粒子は同じ量子状態に一個までしか入らずフェルミオンと呼ばれる。それぞれのグランドカノニカル統計を調べる。

2　本論

大分配関数 Ξ は、ボソンの場合、粒子数を N とする分配関数 Z_N を用いて

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\alpha N} Z_N = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots \quad e^{-\beta\sum_k n_k\epsilon_k} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{\alpha-\beta\epsilon_k})^{-1}$$

で与えられる。ここに、$\alpha = \mu\beta$、$\beta = \frac{1}{kT}$ であり $\beta = \frac{1}{kT}$ であり μ は化学ポテンシャルである。
途中の計算において、同じ順位 k に粒子が何個でも入ることを用いた。

粒子数の平均は量子準位 k のエネルギーを ϵ_k として、

$$\begin{aligned} < N >= \frac{\sum_N e^{-\alpha N} N Z_N}{\sum_N e^{-\alpha N} Z_N} \qquad &= \frac{\partial \log \Xi}{\partial \alpha} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_k \log(1-e^{\alpha-\beta\epsilon_k}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_k \log(1-e^{\alpha-\beta\epsilon_k}) = \sum_k \frac{1}{e^{\alpha-\beta\epsilon}-1} = \sum_k < n_k > \end{aligned}$$

となる。このことから、量子準位 k にある平均粒子数 $< n_k >$ は

$$< n_k >= \frac{1}{e^{\alpha-\beta\epsilon}-1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k-\mu)}-1}$$

と与えられる。

フェルミオンの場合、大分配関数は

$$\Xi = \sum_{n_k=0,1} e^{-\beta \sum_k n_k \epsilon_k} = \prod_k (e^{\alpha - \beta\epsilon_k} + 1)$$

で与えられるので、粒子数の平均は

$$< N >= \frac{\partial \log \Xi}{\partial \alpha} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} = \sum_k < n_k >$$

となる。このことから、量子準位 k にある平均粒子数 $< n_k >$ は

$$< n_k >= \frac{1}{e^{\alpha - \beta\epsilon} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

と与えられる。

3 結論と議論

まとめると、分布関数は

$$< n_k >= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1}$$

となる。復号は－がボソンで＋がフェルミオンに対応する。

両者を比較しよう。ボソンの場合には、粒子のエネルギーが化学ポテンシャル μ に近づくと $< n_k >$ が発散するので、そのような準位 k に粒子が集中することを意味する。このことを、ボース・アインシュタイン凝縮と呼ぶが、これは同じ順位に粒子がいくらでも入ると言うボソンの性質が効いている。一方、フェルミオンの場合には、極低温では、粒子のエネルギーが化学ポテンシャル μ 以下の順位に粒子が一個づつつまり、μ 以上の粒子はないことになる。これは一つの順位に粒子が一個しか入らないというフェルミ粒子の性質が表れている。

前者の現象としては、液体ヘリウムがあり、後者の例としては金属の中の電子や白色矮星の電子、中性子星の中性子などが挙げられる。

参考文献

[1] 地球惑星学科授業「統計力学」

ボース・アインシュタイン分布

$$n(\epsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

フェルミ・ディラック分布

$$f(\epsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$